Sylvester-Schur の定理について

風あざみ

2016/10/14

目 次

1 記号の説明編 **2**

2 **Sylvester-Schur** の定理とは **2**

3 **Sylvester-Schur** の定理と同値な命題編 **3**

4 証明の準備編 **3**

5 証明の準備編 (とくに二項係数に関するもの) **5**

6 $1, 2, \cdots, n$ の最小公倍数の上界編 **6**

7 $k \geq 33$ のとき、**Sylvester-Schur** の定理が成り立つことの証明 **11**

8 $6 \leq k \leq 32$ のとき、**Sylvester-Schur** の定理が成り立つことの証明 **18**

9 $k \leq 5$ のとき、**Sylvester-Schur** の定理が成り立つことの証明 **22**

10 参考にしたサイト **24**

1　記号の説明編

$[x]$ は x を超えない最大の整数を意味する。
また整数 n と素数 p に対して、n が p^l で割り切れ p^{l+1} で割り切れないとき $l = v_p(n)$ と書くことにする。
また、$c < p \leq d$ をみたす素数 p の積を以下のように書くことにする。

$$\prod_{c<p\leq d} p$$

$\pi(n)$ を、n 以下の正の整数のうち、素数であるものの個数とする。
$1, 2, \cdots, n$ の最小公倍数を $lcm(1, 2, \cdots, n)$ と書くことにする。
$\log x$ は自然対数を意味する。

2　Sylvester-Schur の定理とは

Sylvester-Schur の定理とは以下の命題である。

$n \geq 2k$ をみたす任意の正の整数 n, k に対して、
隣接する k 個の整数 $n, n-1, \cdots, n-k+1$
の素因数の中に k より大きなものが必ず存在する。

3　Sylvester-Schur の定理と同値な命題編

命題 0 ：Sylvester-Schur の定理は以下の命題と同値である。
$n \geq 2k$ をみたす任意の正の整数 n, k に対して、
$\binom{n}{k}$ の素因数の中に k より大きなものが必ず存在する。

証明：上記の 2 つの命題の同値性を示す。

$n, n-1, \cdots, n-k+1$ の素因数の中に k より大きなものが存在する。
$\iff$ $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ の素因数の中に k より大きなものが存在する。$\iff$ $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ の素因数の中に k より大きなものが存在する。
以上より、命題 0 はいえた。 □

以降、Sylvester-Schur の定理と同値な以下の命題を示すことにする。

$n \geq 2k$ をみたす任意の正の整数 n, k に対して、
$\binom{n}{k}$ の素因数の中に k より大きなものが必ず存在する。

4　証明の準備編

命題 1 ：x, y を実数とするとき、$[x+y]-[x]-[y] = 0, 1$ がいえる。

証明：$[x+y]-[x]-[y] < (x+y)-(x-1)-(y-1) = 2$
$[x+y]-[x]-[y] > (x+y-1)-x-y = -1$
$[x+y]-[x]-[y]$ は整数だから、$[x+y]-[x]-[y] = 0, 1$ となる。 □

命題 2 ：素数 p を任意にとる。 このとき、以下が言える。

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} [\frac{n}{p^i}]$$

証明：1 以上 n 以下の整数で $v_p(m) = i$ となるものの個数
$=(p^i$ の倍数の個数-p^{i+1} の倍数の個数$)\cdot i$ より

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot ([\frac{n}{p^i}] - [\frac{n}{p^{i+1}}]) = \sum_{i=1}^{\infty} [\frac{n}{p^i}]$$ □

命題 3 ：任意の 33 以上の整数 k に対して、以下の不等式が成立する。

$$\pi(k) \leq \frac{k}{3}$$

証明：$k \geq 49$ のとき、$1, 25, 35, 49$ および、2 以外の偶数や、3 以外の 3 の倍数は素数ではないので、

$$\begin{aligned}\pi(k) &\leq k - 1 - ([\frac{k}{2}] - 1) - ([\frac{k}{3}] - 1) + [\frac{k}{6}] - 3 \\ &< k - 1 - (\frac{k}{2} - 2) - (\frac{k}{3} - 2) + \frac{k}{6} - 3 = \frac{k}{3}\end{aligned}$$

だから正しい。

$34 \leq k \leq 36$ のとき

$$\pi(k) = 11 \text{ かつ、} \frac{k}{3} \geq \frac{34}{3} \geq 11 \text{ だから正しい。}$$

$37 \leq k \leq 40$ のとき

$$\pi(k) = 12 \text{ かつ、} \frac{k}{3} \geq \frac{37}{3} > 12 \text{ だから正しい。}$$

$41 \leq k \leq 42$ のとき

$$\pi(k) = 13 \text{ かつ、} \frac{k}{3} \geq \frac{41}{3} > 13 \text{ だから正しい。}$$

$43 \leq k \leq 46$ のとき

$$\pi(k) = 14 \text{ かつ、} \frac{k}{3} \geq \frac{43}{3} > 14 \text{ だから正しい。}$$

$47 \leq k \leq 48$ のとき

$$\pi(k) = 15 \text{ かつ、} \frac{k}{3} \geq \frac{47}{3} > 15 \text{ だから正しい。}$$

よって命題 3 はいえた。 □

命題 4 ：n, k, e を $n > k > e$ をみたす正の整数とすると以下がいえる。

$$\frac{n-e}{k-e} > \frac{n}{k}$$

証明：左辺と右辺との差を取る。

$$\frac{n-e}{k-e} - \frac{n}{k} = \frac{(n-k)e}{k(k-e)} > 0$$

よって命題 4 はいえた。 □

5　証明の準備編 (とくに二項係数に関するもの)

命題５：n, k を $n > k$ をみたす正の整数とすると以下がいえる。

$$\binom{n}{k} > (\frac{n}{k})^k$$

証明：命題４より

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1} > (\frac{n}{k})^k$$

よって命題５はいえた。 □

命題６：任意の正の整数 n に対して、$\frac{n}{2} \leq [\frac{n+1}{2}]$ がいえる。

証明：n が偶数のとき
$n = 2r$ とかける。(ただし、r は正の整数とする)。
このとき、$\frac{n}{2} = r,\ [\frac{n+1}{2}] = r$ だから正しい。

n が奇数のとき
$n = 2r - 1$ とかける。(ただし、r は正の整数とする)。
このとき、$\frac{n}{2} = r - \frac{1}{2},\ [\frac{n+1}{2}] = r$ だから正しい。
以上より命題６はいえた。 □

命題７：n, k を $n > k$ をみたす正の整数、p を素数とする。すると

$$v_p(\binom{n}{k}) = \sum_{i=1}^{\infty}([\frac{n}{p^i}] - [\frac{k}{p^i}] - [\frac{n-k}{p^i}])$$

証明：命題２より

$$v_p(\binom{n}{k}) = \sum_{i=1}^{\infty}[\frac{n}{p^i}] - \sum_{i=1}^{\infty}[\frac{k}{p^i}] - \sum_{i=1}^{\infty}[\frac{n-k}{p^i}] = \sum_{i=1}^{\infty}([\frac{n}{p^i}] - [\frac{k}{p^i}] - [\frac{n-k}{p^i}]) \quad \square$$

定理８：n, k を $n > k$ をみたす正の整数、p を素数とする。$v_p(\binom{n}{k}) = j_p,\ h = [\log_p n]$ とおくと、以下の不等式が言える。

$$j_p \leq h$$
$$p^{j_p} \leq n$$

証明：$i > h$ のとき、$[\frac{n}{p^i}] = [\frac{k}{p^i}] = [\frac{n-k}{p^i}] = 0$ がいえる。
よって命題１と命題７より

$$j_p = \sum_{i=1}^{\infty}([\frac{n}{p^i}] - [\frac{k}{p^i}] - [\frac{n-k}{p^i}])$$

$$= \sum_{i=1}^{h}([\frac{n}{p^i}] - [\frac{k}{p^i}] - [\frac{n-k}{p^i}]) \leq \sum_{i=1}^{h} 1 = h$$

一方、$p^h \leq n < p^{h+1}$だから、$p^{j_p} \leq p^h \leq n$ であることがいえる。

よって、定理８がいえた。 □

以降、簡単のため、$v_p(\binom{n}{k}) = j_p$ と書くことにする。

命題９：n を 2 以上の正の整数とすると、以下の不等式が成立する。

$$2n \cdot \binom{2n}{n} > 4^n$$

証明：証明すべき不等式の左辺が 2 以上の数による $2n$ 個の積になることを利用する。

$$2n \cdot \binom{2n}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-2}{n-1} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n}{n} > 4^n$$ □

6　$1, 2, \cdots, n$ の最小公倍数の上界編

定理１０：n を 41 以上の整数とするとき、以下の不等式が成立する。

$$\binom{n}{[\frac{n+1}{2}]} < 2^{2[\frac{n+1}{2}]-3}$$

証明：数学的帰納法を用いて証明する。

$n = 41$ のとき、

$$\binom{41}{21} = 269128937220,\ 2^{2\cdot 21-3} = 549755813888$$ より正しい。

$n = 42$ のとき、

$$\binom{42}{21} = 538257874440,\ 2^{2\cdot 21-3} = 549755813888$$ より正しい。

となって定理１０は正しい。

$n = 2c-1, n = 2c$ のとき

$$\binom{2c-1}{c} < 2^{2c-3},\ \binom{2c}{c} < 2^{2c-3}$$

が成り立つと仮定する。

$n = 2c+1$ のとき

$$\frac{\binom{2c+1}{c+1}}{\binom{2c-1}{c}} = \frac{\frac{(2c+1)!}{(c+1)!\cdot c!}}{\frac{(2c-1)!}{c!\cdot(c-1)!}} = \frac{2c+1}{c+1}\cdot\frac{2c}{c} < 2\cdot 2 = 4 \text{ より}$$

$$\binom{2c+1}{c+1} < 4\cdot\binom{2c-1}{c} < 2^2\cdot 2^{2c-3} = 2^{2(c+1)-3}$$

$n = 2c+2$ のとき

$$\frac{\binom{2c+2}{c+1}}{\binom{2c}{c}} = \frac{\frac{(2c+2)!}{(c+1)!\cdot(c+1)!}}{\frac{(2c)!}{c!\cdot c!}} = \frac{2c+2}{c+1}\cdot\frac{2c+1}{c+1} < 2\cdot 2 = 4 \text{ より}$$

$$\binom{2c+2}{c+1} < 4\cdot\binom{2c}{c} < 2^2\cdot 2^{2c-3} = 2^{2(c+1)-3}$$

よって、$n = 2c+1, n = 2c+2$ のときも以下の不等式が成立することがいえる。

$$\binom{n}{[\frac{n+1}{2}]} < 2^{2[\frac{n+1}{2}]-3}$$

したがって、定理１０が成り立つことがいえた。 □

定理１１：n を 2 以上の整数とするとき、以下の不等式が成立する。

$$lcm(1,2,\cdots,n) \le lcm(1,2,\cdots,[\frac{n+1}{2}])\cdot\binom{n}{[\frac{n+1}{2}]}$$

証明：n 以下の素数 p を任意に取る。

$p^h \le n < p^{h+1}$をみたす整数 h をとる。

このとき、$v_p(lcm(1,2,\cdots,n)) = h$ となる。

$0 < p^h \le \frac{n+1}{2}$のとき

このとき、$v_p(lcm(1,2,\cdots,[\frac{n+1}{2}])) = h$ となる。

したがって、$v_p(lcm(1,2,\cdots,[\frac{n+1}{2}])\cdot\binom{n}{[\frac{n+1}{2}]}) \ge h$ となる。

$\frac{n+1}{2} < p^h \le n$ のとき

命題６より、$p^{h-1} \le \frac{n}{p} \le \frac{n}{2} \le [\frac{n+1}{2}]$

よって、$p^{h-1} \le [\frac{n+1}{2}] < p^h$となるから

$v_p(lcm(1,2,\cdots,[\frac{n+1}{2}])) = h-1$ となる。$\cdots(1)$

このとき命題 7 より、以下の式 (2) がいえる。

$v_p(\begin{pmatrix} n \\ [\frac{n+1}{2}] \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{\infty}([\frac{n}{p^i}] - [\frac{[\frac{n+1}{2}]}{p^i}] - [\frac{n-[\frac{n+1}{2}]}{p^i}]) \cdots (2)$

ここで、$n - [\frac{n+1}{2}] \quad < n - (\frac{n+1}{2} - 1) = \frac{n+1}{2},\ [\frac{n+1}{2}] \leq \frac{n+1}{2}$

がいえるから$\frac{n}{p^h} \geq 1,\ 0 < \frac{[\frac{n+1}{2}]}{p^h}, \frac{n-[\frac{n+1}{2}]}{p^h} < 1$ がいえる。

よって命題 1 より、$[\frac{n}{p^h}] - [\frac{[\frac{n+1}{2}]}{p^h}] - [\frac{n-[\frac{n+1}{2}]}{p^h}] = 1$ がいえる。

式 (2) から再び命題 1 より

$\sum_{i=1}^{\infty}([\frac{n}{p^i}] - [\frac{[\frac{n+1}{2}]}{p^i}] - [\frac{n-[\frac{n+1}{2}]}{p^i}]) \geq [\frac{n}{p^h}] - [\frac{[\frac{n+1}{2}]}{p^h}] - [\frac{n-[\frac{n+1}{2}]}{p^h}]$

$= 1$ がいえる。したがって式 (1) より、

$v_p(lcm(1, 2, \cdots, [\frac{n+1}{2}]) \cdot \begin{pmatrix} n \\ [\frac{n+1}{2}] \end{pmatrix}) \geq h$ となる。

上記より、$0 < p^h \leq \frac{n+1}{2}$ と $\frac{n+1}{2} < p^h \leq n$ のいずれにせよ

$v_p(lcm(1, 2, \cdots, n)) \leq v_p(lcm(1, 2, \cdots, [\frac{n+1}{2}]) \cdot \begin{pmatrix} n \\ [\frac{n+1}{2}] \end{pmatrix}) \cdots (3)$

がいえる。任意の素数 p に対して、式 (3) は成立するから

$lcm(1, 2, \cdots, n)$ は、$lcm(1, 2, \cdots, [\frac{n+1}{2}]) \cdot \begin{pmatrix} n \\ [\frac{n+1}{2}] \end{pmatrix}$ を割り切ることが言える。つまり定理 1 1 がいえた。 □

定理 1 2 ：n を 2 以上の整数とするとき、以下の不等式が成り立つ。

$$lcm(1, 2, \cdots, n) < \frac{4^n}{2n}$$

証明：数学的帰納法を用いて証明する。

$2 \leq n \leq 40$ のとき

$n = 2$ のとき

$$lcm(1, 2) = 2,\ \frac{4^2}{2 \cdot 2} = 4$$

$n = 3$ のとき

$$lcm(1, 2, 3) = 6,\ \frac{4^3}{2 \cdot 3} = 10.66 \cdots$$

$n = 4$ のとき

$$lcm(1, 2, 3, 4) = 12,\ \frac{4^4}{2 \cdot 4} = 32$$

$n = 5$ のとき

$$lcm(1, 2, \cdots, 5) = 60,\ \frac{4^5}{2 \cdot 5} = 102.4$$

$n = 6$ のとき

$$lcm(1, 2, \cdots, 6) = 60,\ \frac{4^6}{2 \cdot 6} = 341.33\cdots$$

$n = 7$ のとき

$$lcm(1, 2, \cdots, 7) = 420,\ \frac{4^7}{2 \cdot 7} = 1170.28\cdots$$

$8 \leq n \leq 9$ のとき

$$lcm(1, 2, \cdots, 9) = 2520,\ \frac{4^8}{2 \cdot 8} = 4096$$

より $lcm(1, 2, \cdots, n) \leq lcm(1, 2, \cdots, 9) < \frac{4^8}{2 \cdot 8} \leq \frac{4^n}{2n}$

だから、$lcm(1, 2, \cdots, n) < \frac{4^n}{2n}$がいえる。

$10 \leq n \leq 11$ のとき

$$lcm(1, 2, \cdots, 11) = 27720,\ \frac{4^{10}}{2 \cdot 10} = 52428.8$$

より $lcm(1, 2, \cdots, n) \leq lcm(1, 2, \cdots, 11) < \frac{4^{10}}{2 \cdot 10} \leq \frac{4^n}{2n}$

だから、$lcm(1, 2, \cdots, n) < \frac{4^n}{2n}$がいえる。

$12 \leq n \leq 14$ のとき

$$lcm(1, 2, \cdots, 14) = 360360,\ \frac{4^{12}}{2 \cdot 12} = 669050.66\cdots$$

より $lcm(1, 2, \cdots, n) \leq lcm(1, 2, \cdots, 14) < \frac{4^{12}}{2 \cdot 12} \leq \frac{4^n}{2n}$

だから、$lcm(1, 2, \cdots, n) < \frac{4^n}{2n}$がいえる。

$15 \leq n \leq 18$ のとき

$$lcm(1, 2, \cdots, 18) = 12252240,\ \frac{4^{15}}{2 \cdot 15} = 35791394.13\cdots$$

より $lcm(1, 2, \cdots, n) \leq lcm(1, 2, \cdots, 18) < \frac{4^{15}}{2 \cdot 15} \leq \frac{4^n}{2n}$

だから、$lcm(1, 2, \cdots, n) < \frac{4^n}{2n}$がいえる。

$19 \leq n \leq 23$ のとき

$$lcm(1,2,\cdots,23) = 5354228880,\ \frac{4^{19}}{2\cdot 19} = 7233629130.10\cdots$$

より $lcm(1,2,\cdots,n) \leq lcm(1,2,\cdots,23) < \dfrac{4^{19}}{2\cdot 19} \leq \dfrac{4^n}{2n}$

だから、$lcm(1,2,\cdots,n) < \dfrac{4^n}{2n}$がいえる。

$24 \leq n \leq 29$ のとき

$$lcm(1,2,\cdots,29) = 2329089562800,\ \frac{4^{24}}{2\cdot 24} = 5864062014805.33\cdots$$

より $lcm(1,2,\cdots,n) \leq lcm(1,2,\cdots,29) < \dfrac{4^{24}}{2\cdot 24} \leq \dfrac{4^n}{2n}$

だから、$lcm(1,2,\cdots,n) < \dfrac{4^n}{2n}$がいえる。

$30 \leq n \leq 40$ のとき

$$lcm(1,2,\cdots,40) = 5342931457063200,\ \frac{4^{30}}{2\cdot 30} = 19215358410114116.26\cdots$$

より $lcm(1,2,\cdots,n) \leq lcm(1,2,\cdots,40) < \dfrac{4^{30}}{2\cdot 30} \leq \dfrac{4^n}{2n}$

だから、$lcm(1,2,\cdots,n) < \dfrac{4^n}{2n}$がいえる。

となって定理１ ２は正しい。

$2 \leq n < c$ のとき、定理１ ２が正しいと仮定する
(ただし、c は 41 以上の整数) とする。

$n = c$ のとき 定理１ １より

$$lcm(1,2,\cdots,c) \leq lcm(1,2,\cdots,[\frac{c+1}{2}]) \cdot \binom{c}{[\frac{c+1}{2}]}$$

定理１ ０より $\binom{c}{[\frac{c+1}{2}]} < 2^{2[\frac{c+1}{2}]-3}$がいえるから、

$$lcm(1,2,\cdots,[\frac{c+1}{2}]) \cdot \binom{c}{[\frac{c+1}{2}]} < \frac{4^{[\frac{c+1}{2}]}}{2[\frac{c+1}{2}]} \cdot 2^{2[\frac{c+1}{2}]-3}$$

ここで命題６より、

$$= \frac{4^{2[\frac{c+1}{2}]-1}}{2\cdot 2[\frac{c+1}{2}]} \leq \frac{4^{2\frac{c+1}{2}-1}}{2\cdot 2\frac{c}{2}} = \frac{4^c}{2c}$$

よって $n = c$ のときも、定理１ ２は正しいことがわかる。
以上より、定理１ ２は正しいことが示された。 □

命題１３：x を 2 以上の実数とするとき、以下の等式が成り立つ。

$$lcm(1,2,\cdots,[x]) = \prod_{1<p\leq x} p\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt{x}} p\cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{x}} p\cdot \ldots$$

証明：x 以下の素数 p を任意に取る。

$p^h \leq x < p^{h+1}$をみたす整数 h をとる。

$p^w \leq x \iff p \leq \sqrt[w]{x}$ と $p^w > x \iff p > \sqrt[w]{x}$ がいえるから

(ただし、w は正の整数とする)

$v_p(\prod_{1<p\leq x} p\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt{x}} p\cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{x}} p\cdot \ldots) = h$ がいえる。

一方、$v_p(lcm(1,2,\cdots,[x])) = h$ だから、

$v_p(lcm(1,2,\cdots,[x])) = v_p(\prod_{1<p\leq x} p\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt{x}} p\cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{x}} p\cdot \ldots)$

がいえる、このことは任意の x 以下の素数 p でいえるから、

$lcm(1,2,\cdots,[x]) = \prod_{1<p\leq x} p\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt{x}} p\cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{x}} p\cdot \ldots$　がいえる。

したがって、命題１３がいえた。　□

7　$k \geq 33$ のとき、Sylvester-Schur の定理が成り立つことの証明

命題１４：n, k, u を $n > k, u$ $k \geq 33$ をみたす正の整数でかつ以下の条件をみたすとする。

$\binom{n}{k}$ は u より大きな素因数を持たない。

このとき、以下の不等式が言える。

$$\binom{n}{k} \leq \prod_{1<p\leq u} p\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt{n}} p\cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{n}} p\cdot \ldots$$

証明：u 以下の素数 p を任意に取る。

$p^h \leq n < p^{h+1}$をみたす整数 h をとる。

$p^w \leq n \iff p \leq \sqrt[w]{n}$ と $p^w > n \iff p > \sqrt[w]{n}$ がいえるから

(ただし、w は 2 以上の整数とする)

$v_p(\prod_{1<p\leq u} p\cdot \prod_{1<p\leq\sqrt{n}} p\cdot\ldots\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{n}} p\cdot\ldots) = h$ がいえる。

一方、定理８より $j_p \leq h$ だから、

$j_p \leq v_p(\prod_{1<p\leq u} p\cdot \prod_{1<p\leq\sqrt{n}} p\cdot\ldots\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{n}} p\cdot\ldots)$

がいえる、このことは任意の u 以下の素数 p でいえるから、

$\prod_{1<p\leq u} p\cdot \prod_{1<p\leq\sqrt{n}} p\cdot\ldots\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{n}} p\cdot\ldots$ が、$\binom{n}{k}$ で割り切れる。

したがって、命題１４がいえた。 □

命題１５：整数 n,k が、$n>k\geq 33$ をみたす正の整数で、かつ以下の条件をみたすとする。

$\binom{n}{k}$ は k より大きな素因数を持たない。

このとき、以下の不等式が言える。

$$k > n^{\frac{2}{3}}$$

証明：$\binom{n}{k}$ の素因数 p を任意に取る。このとき、$p\leq k$ が言えることに注意すると、命題３および定理８より

$$\binom{n}{k} = \prod_{1<p\leq k} p^{j_p} \leq n^{\pi(k)} \leq n^{\frac{k}{3}}$$

一方、命題５より、$\binom{n}{k} > (\frac{n}{k})^k$ がいえるから

$n^{\frac{2k}{3}} < k^k$ よって、$k > n^{\frac{2}{3}}$ がいえた。

以上より、命題１５は示された。 □

定理１６：整数 n,k が、$n>k, k>n^{\frac{2}{3}},\ k\geq 33$ をみたす正の整数とする。このとき、以下の不等式が言える。

$$\prod_{1<p\leq k} p\cdot \prod_{1<p\leq\sqrt{n}} p\cdot\ldots\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{n}} p\cdot\ldots < \frac{4^k}{2k}\cdot 4^{\sqrt{n}}$$

証明：2 以上の任意の整数 l に対して、

$\sqrt[l]{k} = k^{\frac{1}{l}} > n^{\frac{2}{3l}} \geq n^{\frac{1}{2l-1}} = \sqrt[2l-1]{n}$

がいえるから、定理１２と命題１３より

$\frac{4^k}{2k} > lcm(1,2,\cdots,k) = \prod_{1<p\leq k} p\cdot \prod_{1<p\leq\sqrt{k}} p\cdot\ldots\cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{k}} p\cdot\ldots$

$$\geq \prod_{1<p\leq k} p \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[3]{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[2h-1]{n}} p \cdot \ldots$$

即ち、$\prod_{1<p\leq k} p \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[3]{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[2h-1]{n}} p \cdot \ldots < \frac{4^k}{2k} \cdots (4)$

がいえる。一方、定理１２と命題１３より

$$\prod_{1<p\leq \sqrt{n}} p \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[4]{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[2h]{n}} p \cdot \ldots$$

$$= lcm(1, 2, \cdots, [\sqrt{n}]) < \frac{4^{[\sqrt{n}]}}{2[\sqrt{n}]} < 4^{\sqrt{n}}$$

即ち、$\prod_{1<p\leq \sqrt{n}} p \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[2]{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[2h]{n}} p \cdot \ldots < 4^{\sqrt{n}} \cdots (5)$

がいえる。また式 (4) と式 (5) より、以下がわかる。

$$\prod_{1<p\leq k} p \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{n}} p \cdot \ldots < \frac{4^k}{2k} \cdot 4^{\sqrt{n}}$$

となることがいえる。以上より、定理１６はいえた。 □

定理１７：整数 n, k が、$n > k \geq 33$ をみたす正の整数で、かつ以下の条件をみたすとする。
$\binom{n}{k}$ は k より大きな素因数を持たない。
このとき、以下の不等式が言える。

$$\binom{n}{k} < \frac{4^k}{2k} \cdot 4^{\sqrt{n}}$$

証明：$\binom{n}{k}$ は k より大きな素因数を持たないから命題１４より、

$$\binom{n}{k} \leq \prod_{1<p\leq k} p \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{n}} p \cdot \ldots \cdots (6)$$

命題１５より、$k > n^{\frac{2}{3}}$ がいえるから、定理１６より

$$\prod_{1<p\leq k} p \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[h]{n}} p \cdot \ldots < \frac{4^k}{2k} \cdot 4^{\sqrt{n}} \cdots (7)$$

となることがいえる。したがって、式 (6) と式 (7) より、以下が言える。

$$\binom{n}{k} < \frac{4^k}{2k} \cdot 4^{\sqrt{n}}$$

以上より、定理１７は正しいことが示された。 □

ここで、x の値を下回らない最小の整数を $\{x\}$ とおくことにする。

命題１８：整数 n,k が、$n \geq \frac{373}{100}k,\ k \geq 33$ をみたすとき、Sylvester-Schur の定理は成り立つ。

証明：Sylvester-Schur の定理は成り立たないと仮定する。

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

$\geq \frac{\{\frac{373}{100}k\}\cdot(\{\frac{373}{100}k\}-1)\cdot\ldots\cdot(\{\frac{373}{100}k\}-k+1)}{k!} = \binom{\{\frac{373}{100}k\}}{k}$

また、命題５および命題９より

$\binom{\{\frac{373}{100}k\}}{k} = \binom{2k}{k}\cdot\frac{\{\frac{373}{100}k\}}{2k}\cdot\frac{\{\frac{373}{100}k\}-1}{2k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{\{\frac{373}{100}k\}-k+1}{k+1}$

$> \frac{4^k}{2k}\cdot(\frac{\{\frac{373}{100}k\}}{2k})^k \geq \frac{4^k}{2k}\cdot(\frac{373}{200})^k$よって、定理１７より

$\frac{4^k}{2k}\cdot(\frac{373}{200})^k < \frac{4^k}{2k}\cdot 4^{\sqrt{n}}$がいえる。

よって、$(\frac{373}{200})^k < 4^{\sqrt{n}} = 2^{2\sqrt{n}}$即ち、$k\log\frac{373}{200} < 2\sqrt{n}\log 2$ がいえる。

ここで、命題１５より $k > n^{\frac{2}{3}}$がいえるから、$n^{\frac{2}{3}} < 2\frac{\sqrt{n}\log 2}{\log\frac{373}{200}}$

すなわち、$n < (2\frac{\log 2}{\log\frac{373}{200}})^6 = 121.09\cdots$がいえるが、$n \geq \frac{373}{100}k \geq 123.09$

となるから不合理。以上より、命題１８はいえた。 □

命題１９：整数 n,k が、$\frac{329}{100}k \leq n < \frac{373}{100}k,\ k \geq 33$ をみたすとき、Sylvester-Schur の定理は成り立つ。

証明：Sylvester-Schur の定理は成り立たないと仮定する。

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

$\geq \frac{\{\frac{329}{100}k\}\cdot(\{\frac{329}{100}k\}-1)\cdot\ldots\cdot(\{\frac{329}{100}k\}-k+1)}{k!} = \binom{\{\frac{329}{100}k\}}{k}$

また、命題５および命題９より

$\binom{\{\frac{329}{100}k\}}{k} = \binom{2k}{k}\cdot\frac{\{\frac{329}{100}k\}}{2k}\cdot\frac{\{\frac{329}{100}k\}-1}{2k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{\{\frac{329}{100}k\}-k+1}{k+1}$

$> \frac{4^k}{2k}\cdot(\frac{\{\frac{329}{100}k\}}{2k})^k \geq \frac{4^k}{2k}\cdot(\frac{329}{200})^k$よって、定理１７より

$\frac{4^k}{2k}\cdot(\frac{329}{200})^k < \frac{4^k}{2k}\cdot 4^{\sqrt{n}}$がいえる。

よって、$(\frac{329}{200})^k < 4^{\sqrt{n}} = 2^{2\sqrt{n}}$即ち、$k \log \frac{329}{200} < 2\sqrt{n} \log 2$ がいえる。
ここで、$k > \frac{100}{373} n$ がいえるから、$\frac{100}{373} n < 2 \frac{\sqrt{n} \log 2}{\log \frac{329}{200}}$
すなわち、$n < (2 \frac{\log 2}{\log \frac{329}{200}} \cdot \frac{373}{100})^2 = 107.92 \cdots$ がいえるが、$n \geq \frac{329}{100} k$
≥ 108.57 となるから不合理。以上より、命題１９はいえた。 □

命題２０：n, k を $\frac{267}{104} k \leq n < \frac{329}{100} k,\ k \geq 33$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさない正の整数とする。このとき $n \leq 333$ がいえる。

証明：n の上界を算出する。

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$
$\geq \frac{\{\frac{267}{104} k\} \cdot (\{\frac{267}{104} k\} - 1) \cdot \ldots (\{\frac{267}{104} k\} - k + 1)}{k!} = \binom{\{\frac{267}{104} k\}}{k}$
また、命題５および命題９より
$\binom{\{\frac{267}{104} k\}}{k} = \binom{2k}{k} \cdot \frac{\{\frac{267}{104} k\}}{2k} \cdot \frac{\{\frac{267}{104} k\} - 1}{2k - 1} \cdot \ldots \frac{\{\frac{267}{104} k\} - k + 1}{k + 1}$
$> \frac{4^k}{2k} \cdot (\frac{\{\frac{267}{104} k\}}{2k})^k \geq \frac{4^k}{2k} \cdot (\frac{267}{208})^k$よって、定理１７より
$\frac{4^k}{2k} \cdot (\frac{267}{208})^k < \frac{4^k}{2k} \cdot 4^{\sqrt{n}}$がいえる。
よって、$(\frac{267}{208})^k < 4^{\sqrt{n}} = 2^{2\sqrt{n}}$即ち $k \log \frac{267}{208} < 2\sqrt{n} \log 2$ がいえる。
ここで、$k > \frac{100}{329} n$ がいえるから、$\frac{100}{329} n < 2 \frac{\sqrt{n} \log 2}{\log \frac{267}{208}}$
すなわち、$n < (2 \frac{\log 2}{\log \frac{267}{208}} \cdot \frac{329}{100})^2 = 333.60 \cdots$ がいえる
以上より、命題２０はいえた。 □

命題２１：$x \geq 1$ のとき下記の関数は単調増加である。

$$f_1(x) = \frac{4^x}{x}$$

証明：$f_1(x)$ を x で微分すると

$$f_1'(x) = 4^x \cdot \frac{x \log 4 - 1}{x^2} \geq 4^x \cdot \frac{\log 4 - 1}{x^2} > 4^x \cdot \frac{\log 4 - \log 3}{x^2} > 0$$

よって $x \geq 1$ のとき $f_1'(x) > 0$ がいえる。このことは $f_1(x)$ が $x \geq 1$ のとき、単調増加であることを示している。 □

命題２２：$x \geq 4$ のとき下記の不等式が言える。

$$\frac{x^3}{3} - 1 - x^2 > 0$$

証明：関数 $f_2(x)$ を以下のように取る。

$$f_2(x) = \frac{x^3}{3} - 1 - x^2$$

$x > 2$ のとき、$f_2(x)$ を x で微分すると $f_2'(x) = x^2 - 2x = x(x-2) > 0$ がいえる。よって $x > 2$ のとき $f_2(x)$ が単調増加であることがいえる。
したがって、$x \geq 4$ のとき、$f_2(x) \geq f_2(4) = \frac{13}{3} > 0$ がいえる。
以上より、命題２２は正しいことが示された。 □

命題２３：n, k を $n \geq 2k$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさない正の整数とする。このとき、$\binom{n}{k}$ の素因数 p を任意に取ると、$p \leq \frac{n}{3}$ となる。

証明：命題２３が成立しないと仮定する。

このとき、$p > \frac{n}{3}$となる。また、p は明らかに n 以下である。
また、命題２３の仮定より、$p \leq k$ がいえる。
このとき、$p \leq k \leq n-k < n < 3p$ だから、$v_p(\binom{n}{k}) \leq 2 - 2 = 0$
よって、$\binom{n}{k}$が p で割り切れないことがいえるが、これは不合理。
以上より、命題２３はいえた。 □

命題２４：n, k を $2k \leq n < \frac{267}{104}k,\ k \geq 50$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさない正の整数とする。このとき $n \leq 334$ がいえる。

証明：n の上界を算出する。

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \geq \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot \ldots (k+1)}{k!} = \binom{2k}{k}$$

また命題９より $\binom{2k}{k} > \frac{4^k}{2k}$がいえる。

$\binom{n}{k}$の素因数 p を任意にとる。このとき、命題２３より、任意の
$\binom{n}{k}$の素因数 p に対して、$p \leq \frac{n}{3}$がいえるから、命題１４より

$$\binom{n}{k} \leq \prod_{1<p\leq[\frac{n}{3}]} p \cdot \prod_{1<p\leq\sqrt{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[k]{n}} p \cdot \ldots$$

$n^{\frac{1}{3}} \geq 4.64158\cdots > 4$ だから、命題２２より $n > \dfrac{n}{3} \geq [\dfrac{n}{3}] > \dfrac{n}{3} - 1 > n^{\frac{2}{3}}$

かつ $[\dfrac{n}{3}] \geq 33$ だから、定理１６より

$$\prod_{1<p\leq[\frac{n}{3}]} p \cdot \prod_{1<p\leq\sqrt{n}} p \cdot \ldots \cdot \prod_{1<p\leq \sqrt[k]{n}} p \cdot \ldots < \frac{4^{[\frac{n}{3}]}}{2[\frac{n}{3}]} \cdot 4^{\sqrt{n}}$$

ここで命題２１より、$\dfrac{4^{[\frac{n}{3}]}}{2[\frac{n}{3}]} \cdot 4^{\sqrt{n}} \leq \dfrac{4^{\frac{n}{3}}}{2\frac{n}{3}} \cdot 4^{\sqrt{n}} \leq \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{4^{\frac{n}{3}}}{2k} \cdot 4^{\sqrt{n}}$

がいえるから、以上の議論より $\dfrac{4^k}{2k} < \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{4^{\frac{n}{3}}}{2k} \cdot 4^{\sqrt{n}}$

よって、$4^k < \dfrac{3}{2} \cdot 4^{\frac{n}{3}} \cdot 4^{\sqrt{n}} < \dfrac{3}{2} \cdot 4^{\frac{89k}{104}} \cdot 4^{\sqrt{n}}$

したがって、$4^{\frac{5n}{89}} < 4^{\frac{15k}{104}} < \dfrac{3}{2} \cdot 4^{\sqrt{n}}$

即ち、$\dfrac{n}{8.9}\log 2 < 2\sqrt{n}\log 2 + \log\dfrac{3}{2} < 2\sqrt{n}\log 2 + \log 2$

よって、$n < (8.9 + \sqrt{8.9^2 + 8.9})^2 = 334.40\cdots$ がいえる。

以上より、命題２４はいえた。 □

$2k \leq n < \frac{267}{104}k,\ 33 \leq k \leq 49$ の場合は、$n < \frac{267}{104} \cdot 49 = 125.79\cdots$ となることを考慮すると、命題１８、命題１９、命題２０、命題２４より、$n \geq 335$ のとき、Sylvester-Schur の定理が成り立つことがわかる。

命題２５：n, k を $2k \leq n \leq 334,\ k \geq 33$ をみたすとき、Sylvester-Schur の定理は成り立つ。

証明：61 から 334 までの素数列、$61, 89, 113, 139, 167, 199, 229, 257, 283, 313$ を考えれば明らかである。 □

以上より $k \geq 33$ のとき、Sylvester-Schur の定理は成り立つことがいえた。

8　$6 \leq k \leq 32$ のとき、Sylvester-Schur の定理が成り立つことの証明

命題２６：任意の 6 以上 7 以下の整数 k に対して、以下の不等式が成立する。

$$\pi(k) \leq \frac{4k}{7}$$

任意の 8 以上 14 以下の整数 k に対して、以下の不等式が成立する。

$$\pi(k) \leq \frac{k}{2}$$

また、任意の 15 以上 19 以下の整数 k に対して、以下の不等式が成立する。

$$\pi(k) \leq \frac{8k}{19}$$

また、任意の 20 以上 22 以下の整数 k に対して、以下の不等式が成立する。

$$\pi(k) \leq \frac{2k}{5}$$

また、任意の 23 以上 25 以下の整数 k に対して、以下の不等式が成立する。

$$\pi(k) \leq \frac{9k}{23}$$

また、任意の 26 以上 32 以下の整数 k に対して、以下の不等式が成立する。

$$\pi(k) \leq \frac{11k}{31}$$

証明：$k = 6$ のとき

$$\pi(k) = 3 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} = \frac{3}{6} = 0.5 < \frac{4}{7} \text{だから正しい。}$$

$k = 7$ のとき

$$\pi(k) = 4 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} = \frac{4}{7} = 0.571\cdots \text{だから正しい。}$$

$8 \leq k \leq 10$ のとき

$$\pi(k) = 4 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{1}{2} = 0.5 \text{ だから正しい。}$$

$11 \leq k \leq 12$ のとき

$$\pi(k) = 5 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{5}{11} = 0.454\cdots < \frac{1}{2} \text{だから正しい。}$$

$13 \leq k \leq 14$ のとき

$$\pi(k) = 6 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{6}{13} = 0.461\cdots < \frac{1}{2} \text{だから正しい。}$$

$15 \leq k \leq 16$ のとき

$$\pi(k) = 6 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{6}{15} = 0.4 < \frac{8}{19} \text{だから正しい。}$$

$17 \leq k \leq 18$ のとき

$$\pi(k) = 7 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{7}{17} = 0.411\cdots < \frac{8}{19} \text{だから正しい。}$$

$k = 19$ のとき

$$\pi(k) = 8 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} = \frac{8}{19} = 0.421\cdots \text{だから正しい。}$$

$20 \leq k \leq 22$ のとき

$$\pi(k) = 8 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{2}{5} \text{だから正しい。}$$

$23 \leq k \leq 25$ のとき

$$\pi(k) = 9 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{9}{23} = 0.391\cdots \text{だから正しい。}$$

$26 \leq k \leq 28$ のとき

$$\pi(k) = 9 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{9}{26} = 0.346\cdots < \frac{11}{31} \text{だから正しい。}$$

$29 \leq k \leq 30$ のとき

$$\pi(k) = 10 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} \leq \frac{10}{29} = 0.344\cdots < \frac{11}{31} \text{だから正しい。}$$

$31 \leq k \leq 32$ のとき

$$\pi(k) = 11 \text{ かつ、} \frac{\pi(k)}{k} = \frac{11}{31} = 0.354\cdots \text{だから正しい。}$$

よって命題２６はいえた。 □

命題２７：n, k を $n \geq 2k,\ 6 \leq k \leq 7$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさないとする。このとき、以下の不等式が言える。

$$k > n^{\frac{3}{7}}$$

同様に、$n \geq 2k,\ 8 \leq k \leq 14$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさないとする。このとき、以下の不等式が言える。

$$k > n^{\frac{1}{2}}$$

同様に、n, k を $n \geq 2k,\ 15 \leq k \leq 19$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさないとする。このとき、以下の不等式が言える。

$$k > n^{\frac{11}{19}}$$

同様に、n, k を $n \geq 2k,\ 20 \leq k \leq 22$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさないとする。このとき、以下の不等式が言える。

$$k > n^{\frac{3}{5}}$$

同様に、n, k を $n \geq 2k,\ 23 \leq k \leq 25$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさないとする。このとき、以下の不等式が言える。

$$k > n^{\frac{14}{23}}$$

同様に、n, k を $n \geq 2k,\ 26 \leq k \leq 32$ をみたし、かつ Sylvester-Schur の定理をみたさないとする。このとき、以下の不等式が言える。

$$k > n^{\frac{20}{31}}$$

証明：k の値で場合分けをする。

$6 \leq k \leq 7$ のとき

$\binom{n}{k}$ の素因数 p を任意に取る。

このとき、$p \leq k$ が言えるので、命題２６および定理８より

$$\binom{n}{k} = \prod_{1<p\leq k} p^{j_p} \leq n^{\pi(k)} \leq n^{\frac{4k}{7}}$$

一方、命題５より、$\binom{n}{k} > (\frac{n}{k})^k$ がいえるから

$n^{\frac{3k}{7}} < k^k$ よって、$k > n^{\frac{3}{7}}$ がいえた。

$8 \leq k \leq 14$ のとき

$\binom{n}{k}$の素因数 p を任意に取る。

このとき、$p \leq k$ が言えるので、命題２ 6 および定理８より

$$\binom{n}{k} = \prod_{1<p\leq k} p^{j_p} \leq n^{\pi(k)} \leq n^{\frac{k}{2}}$$

一方、命題５より、$\binom{n}{k} > (\frac{n}{k})^k$がいえるから

$n^{\frac{k}{2}} < k^k$よって、$k > n^{\frac{1}{2}}$がいえた。

$15 \leq k \leq 19$ のとき

$\binom{n}{k}$の素因数 p を任意に取る。

このとき、$p \leq k$ が言えるので、命題２ 6 および定理８より

$$\binom{n}{k} = \prod_{1<p\leq k} p^{j_p} \leq n^{\pi(k)} \leq n^{\frac{8k}{19}}$$

一方、命題５より、$\binom{n}{k} > (\frac{n}{k})^k$がいえるから

$n^{\frac{11k}{19}} < k^k$よって、$k > n^{\frac{11}{19}}$がいえた。

$20 \leq k \leq 22$ のとき

$\binom{n}{k}$の素因数 p を任意に取る。

このとき、$p \leq k$ が言えるので、命題２ 6 および定理８より

$$\binom{n}{k} = \prod_{1<p\leq k} p^{j_p} \leq n^{\pi(k)} \leq n^{\frac{2k}{5}}$$

一方、命題５より、$\binom{n}{k} > (\frac{n}{k})^k$がいえるから

$n^{\frac{3k}{5}} < k^k$よって、$k > n^{\frac{3}{5}}$がいえた。

$23 \leq k \leq 25$ のとき

$\binom{n}{k}$の素因数 p を任意に取る。

このとき、$p \leq k$ が言えるので、命題２ 6 および定理８より

$$\binom{n}{k} = \prod_{1<p\leq k} p^{j_p} \leq n^{\pi(k)} \leq n^{\frac{9k}{23}}$$

一方、命題５より、$\binom{n}{k} > (\frac{n}{k})^k$がいえるから

$n^{\frac{14k}{23}} < k^k$よって、$k > n^{\frac{14}{23}}$がいえた。

$26 \leq k \leq 32$ のとき

$\binom{n}{k}$の素因数 p を任意に取る。

このとき、$p \leq k$ が言えるので、命題２ 6 および定理８より

$$\binom{n}{k} = \prod_{1<p\leq k} p^{j_p} \leq n^{\pi(k)} \leq n^{\frac{11k}{31}}$$

一方、命題５より、$\binom{n}{k} > (\frac{n}{k})^k$がいえるから

$n^{\frac{20k}{31}} < k^k$よって、$k > n^{\frac{20}{31}}$がいえた。

以上より、命題２７は示された。 □

命題２７より、$6 \leq k \leq 7$ のとき、$n < k^{\frac{7}{3}} \leq 7^{\frac{7}{3}} = 93.73\cdots$
$8 \leq k \leq 14$ のとき、$n < k^2 \leq 14^2 = 196$
$15 \leq k \leq 19$ のとき、$n < k^{\frac{19}{11}} \leq 19^{\frac{19}{11}} = 161.71\cdots$
$20 \leq k \leq 22$ のとき、$n < k^{\frac{5}{3}} \leq 22^{\frac{5}{3}} = 172.73\cdots$
$23 \leq k \leq 25$ のとき、$n < k^{\frac{23}{14}} \leq 25^{\frac{23}{14}} = 197.97\cdots$
$26 \leq k \leq 32$ のとき、$n < k^{\frac{31}{20}} \leq 32^{\frac{31}{20}} = 215.26\cdots$
がいえるので、以下の命題２８とあわせると、$6 \leq k \leq 32$ のとき、Sylvester-Schur の定理は成り立つことがわかる。

命題２８：n, k を $6 \leq k \leq 32,\ 2k \leq n \leq 215$ をみたすとき、Sylvester-Schur の定理は成り立つ。

証明：11 から 215 までの素数あるいは 37 以上の素因数を持つ整数からなる数列 $11, 17, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 73, 79, 83, 89, 94, 97, 103, 109$
$113, 118, 122, 127, 131, 134, 139, 142, 146, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 183$
$188, 193, 199, 202, 206, 211$ を考えれば明らかである。 □

9 $k \leq 5$ のとき、Sylvester-Schur の定理が成り立つことの証明

$n \geq 2k$ より、$n-k+1 > k$ となるので、$n-k+1, n-k+2, \cdots, n$ の中に素数があれば、Sylvester-Schur の定理が成り立つことは明らかである。よって、以降、$n-k+1, n-k+2, \cdots, n$ すべて合成数と考えることにする。

正の整数 n に対して、$D(n)$ を n の素因数全体からなる集合とする。

命題２９：a, b を次のような正の整数とする。
$D(a)$ の元 p を任意に取るとき、a は p^2 で割り切れ、b は p^2 で割り切れない。
このとき、任意の正の整数 m に対して、$am+b$ は $D(a)$ の元以外の素因数を持つ。

証明：b が p で割り切れないとき
$D(a)$ の元 p を任意にとる。このとき、$am+b \equiv b \pmod{p}$ がいえるから $am+b$ は p で割り切れない。したがって、$am+b$ は $D(a)$ の元以外の素因数 q を持つことがいえる。

b が p で割り切れるとき
$D(a)$ の元 p を任意にとる。a, b は正の整数 s, t を用いて $a = ps, b = pt$ とかける。このとき、s は p で割り切れ、t は p で割り切れないことに注意する。$sm + t \equiv t \pmod{p}$ がいえるから、$sm + t$ は p で割り切れない。したがって、$sm + t$ は $D(a)$ の元以外の素因数 q を持つことがいえる。また、$am+b = p(sm+t)$ だから、q は $am+b$ の素因数でもある。いずれにせよ、$am+b$ は $D(a)$ の元以外の素因数 q を持つことがいえた。 □

$k = 1$ の場合は、明らかに Sylvester-Schur の定理が成り立つ。

命題３０：$k = 2$ のとき、Sylvester-Schur の定理が成り立つ。

証明：$n, n-1$ のいずれかは奇数であるから、奇数の方が題意をみたすことは明らかである。 □

命題３１：$k = 3, 4$ のとき、Sylvester-Schur の定理が成り立つ。

証明：$n \leq 9$ のときは明らか。$n > 9$ のときを考える。
集合 $\{n-2, n-1, n\}$ から任意に n' をとる。
n' を 36 で割ったときの余りを考える。命題２９を考慮すると、n' が $2, 3$ 以外の素因数を持たない可能性があるのは、n' を 36 で割ったときの余りが $4, 9$ で割り切れる場合、即ち n' が $4, 9$ で割り切れる場合のみである。
ここで、$n-2, n-1, n$ には $4, 9$ の倍数が高々1個しかないから、集合 $\{n-2, n-1, n\}$ には、$2, 3$ 以外の素因数を持つ数、即ち題意をみたす整数が少なくとも 1 つあることがいえた。 □

命題３２：$k = 5$ のとき、Sylvester-Schur の定理が成り立つ。

証明：$n \leq 34$ のときは明らか。$n > 34$ のときを考える。
集合 $\{n-4, n-3, n-2, n-1, n\}$ から任意に n' をとる。
n' を 900 で割ったときの余りを考える。命題２９を考慮すると、n' が $2, 3, 5$ 以外の素因数を持たない可能性があるのは、n' を 900 で割ったときの余りが $4, 9, 25$ で割り切れる場合、即ち n' が $4, 9, 25$ で割り切れる場合のみである。

ここで、$n-4, n-3, n-2, n-1, n$ には $9, 25$ の倍数が高々1 個、そして 4 の倍数は高々2 個しかないから、集合 $\{n-4, n-3, n-2, n-1, n\}$ には $2, 3, 5$ 以外の素因数を持つ数、即ち題意をみたす整数が少なくとも 1 つあることがいえた。 □

10 参考にしたサイト

http://www.renyi.hu/~p_erdos/1934-01.pdf